VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 13

Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

U ovoj lekciji vježbamo rješavanje jedne klase običnih diferencijalnih jednadžbi 2. reda $-$ radi se o **linearnim** običnim diferencijalnim jednadžbama 2. reda **s konstantnim koeficijentima**. To su jednadžbe oblika

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

gdje su p i q realni brojevi, a $f(x)$ neka funkcija varijable x. Nepoznanica ove jednadžbe je $y = y(x)$, a riješiti jednadžbu znači dobiti eksplicitan izraz za funkciju y.

Kao i inače, razlikujemo dvije situacije:

(a) Ako je $f(x) = 0$, gornja jednadžba ima oblik

$$y'' + py' + qy = 0$$

i zovemo je **homogena** jednadžba.

(b) Ako je $f(x) \neq 0$, gornja jednadžba ima općeniti oblik (gdje je s desne strane neka nenul funkcija varijable x). U tom slučaju jednadžbu zovemo **nehomogena** jednadžba.

U sljedećem odlomku opisujemo kako se rješavaju homogene jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Homogene jednadžbe

Homogene jednadžbe oblika

$$y'' + py' + qy = 0$$

rješavaju se pomoću tzv. **karakteristične jednadžbe**, koju iz diferencijalne jednadžbe dobijemo uvođenjem parametra λ po sljedećem principu

$$\begin{array}{ccc} y & \rightarrow & 1 \\ y' & \rightarrow & \lambda \\ y'' & \rightarrow & \lambda^2. \end{array}$$

Tako gornjoj jednadžbi pripada sljedeća karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Kao i kod svake kvadratne jednadžbe, njena rješenja $\lambda_{1,2}$ mogu biti:

(a) realni i različiti brojevi $-$ u tom slučaju rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano je s

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

gdje su C_1 i C_2 realne konstante.

(b) realni i jednaki brojevi ($\lambda_1 = \lambda_2$) $-$ ovdje je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano s

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(c) kompleksni brojevi $-$ u tom slučaju vrijedi $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, jer znamo da su kompleksna rješenja kvadratne jednadžbe međusobno konjugirana. U ovom slučaju rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano je s

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Riješimo nekoliko primjera.

Primjer 1 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Rješenje: Karakteristična jednadžba koja pripada ovoj diferencijalnoj jednadžbi glasi

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

a njena su rješenja $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Kako su rješenja različiti realni brojevi, imamo da je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 2 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Rješenje: U ovom slučaju karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Njeni korijeni su jednaki realni brojevi $\lambda_{1,2} = -2$, pa rješenje glasi

$$y(x) = e^{-2x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3 Riješite

$$y'' + y = 0.$$

Rješenje: Ovoj jednadžbi pripada karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

čija su rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa vidimo da je $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (to su realni i imaginarni dio jednog od ovih korijena!). Stoga je rješenje dano s

$$y(x) = e^{0\cdot x}(C_1 \cos 1\cdot x + C_2 \sin 1\cdot x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Napomena:

Ako želimo zadati Cauchyjev problem (diferencijalna jednadžba s jednim ili više početnih uvjeta) čija je diferencijalna jednadžba drugog reda, prirodno je zadati ne jedan (kao što je to bilo kod običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda), već **dva** početna uvjeta. Naime, vidimo već iz gore opisanih rješenja da postoje dvije neodređene realne konstante C_1 i C_2. Tek zadavanjem **dva** početna uvjeta dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, čijim rješavanjem potom u potpunosti fiksiramo konstante C_1 i C_2, tj. dolazimo do jedinstvenog rješenja. Najčešće se ti početni uvjeti odnose na neke vrijednosti same funkcije i njene prve derivacije.

Primjer 4 Riješite sljedeći Cauchyjev problem (nađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava zadane početne uvjete):

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Rješenje: Najprije rješavamo diferencijalnu jednadžbu. Njena karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

a rješenja te jednadžbe dana su s $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, pa je opće rješenje diferencijalne jednadžbe dano s

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo odredili partikularno rješenje, koristimo početne uvjete:

$$\begin{aligned} y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} &\quad\Rightarrow\quad y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} &\quad\Rightarrow\quad y'(0) = -2C_1 - C_2 = -1. \end{aligned}$$

Dolazimo do sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -2C_1 - C_2 &= -1, \end{aligned}$$

odakle izlazi $C_1 = 0, C_2 = 1$. Uvrštavanjem u opće rješenje dolazimo do partikularnog rješenja (rješenja zadanog Cauchyjevog problema):

$$y(x) = e^{-x}.$$

Zadatak 1 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

1) $y'' - 9y = 0$

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$

3) $y'' + y' - y = 0$

4) $y'' - 2y' + 5y = 0$

5) $y'' - 9y' + 9y = 0$

6) $y'' - y = 0.$

Zadatak 2 Odredite partikularna rješenja sljedeći diferencijalnih jednadžbi s početnim uvjetima:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8$

2) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$

3) $y'' + 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

4) $y'' + 3y' = 0, y(0) = 0, y(3) = 0.$

Nehomogene jednadžbe

Rješenje nehomogenih jednadžbi

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

dano je s

$$y = y_0 + Y,$$

gdje je y_0 opće rješenje pripadne homogene jednadžbe, a Y je neko (partikularno) rješenje nehomogene jednadžbe, koje u ovisnosti od oblika funkcije $f(x)$ tražimo u sljedećem obliku:

(1) Ako je $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja:

i) u slučaju da a nije rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax}Q_n(x)$, gdje je $Q_n(x)$ neki polinom s neodređenim koeficijentima

ii) u slučaju da a jest rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = x^r e^{ax}Q_n(x)$, gdje je r kartnost a kao korijena karakteristične jednadžbe (broj koliko se puta a pojavljuje kao rješenje te jednadžbe $-$ to može biti 1 ili 2), a $Q_n(x)$ je neki polinom s neodređenim koeficijentima

(2) Ako je $f(x) = e^{ax} \cdot [P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja, a $Q_m(x)$ polinom $m-$tog stupnja:

i) u slučaju da $a \pm bi$ nisu korijeni karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax} \cdot [S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$, gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi istog stupnja $N = \max(m,n)$ (stupnja jednakog maksimalnom stupnju od stupnjeva polinoma koji se pojavljuju u $f(x)$), i to s neodređenim koeficijentima

ii) u slučaju da $a \pm bi$ jesu korijeni karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = xe^{ax} \cdot [S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$, gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi istog stupnja $N = \max(m,n)$ (stupnja jednakog maksimalnom stupnju od stupnjeva polinoma koji se pojavljuju u $f(x)$), i to s neodređenim koeficijentima.

Napomena:

Gornja situacija pokriva mnogo mogućnosti za $f(x)$, i to kada je f umnožak eksponencijalne funkcije i polinoma ili umnožak eksponencijalne funkcije i linearne kombinacije trigonometrijskih funkcija s polinomima kao koeficijentima. Kako prepoznati radi li se o prvom ili drugom slučaju? Najjednostavnije je vidjeti sadrži li $f(x)$ neke trigonometrijske funkcije $-$ ako sadrži, znači da je riječ o slučaju (2) opisanom gore.

Nakon što utvrdimo oblik funkcije Y, uvrštavamo Y (i sve njene derivacije koje treba) u polaznu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu te potom određujemo nepoznate koeficijente u polinomu (ili polinomima) koji se u Y pojavljuju.

Primjer 5 Riješite sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}.$$

Rješenje:

Najprije nalazimo y_0, tj. opće rješenje pripadne homogene jednadžbe. Ona glasi

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

pa je njena karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Rješenja karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = -1$, pa je opće rješenje homogene jednadžbe dano s

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sada prelazimo na traženje partikularnog rješenja, tj. Y. Kako je $f(x) = e^{2x}$, što možemo u "punom" obliku situacije (1) s prethodne stranice shvatiti kao $f(x) = e^{2\cdot x} \cdot 1$, vidimo da je $a = 2$, $P(x) = 1$. Kako $a = 2$ nije rješenje gornje karakteristične jednadžbe, Y tražimo u obliku

$$Y = A \cdot e^{2x},$$

gdje je $Q(x) = A$, tj. konstantan polinom. Konstantu A određujemo uvrštavanjem Y u polaznu diferencijalnu jednadžbu. Kako ta diferencijalna jednadžba sadrži y' i y'', moramo najprije izračunati Y' i Y'':

$$\begin{aligned} Y' &= 2Ae^{2x} \\ Y'' &= 4Ae^{2x}. \end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem Y, Y' i Y'' u polaznu jednadžbu dobivamo

$$4Ae^{2x} + 2 \cdot 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 9Ae^{2x} = e^{2x}.$$

Dijeljenjem dobivene jednakosti s e^{2x} slijedi da je $9A = 1$, tj. $A = \frac{1}{9}$, pa je

$$Y = \frac{1}{9}e^{2x}.$$

Sada slijedi da je rješenje dane diferencijalne jednadžbe dano s

$$y = y_0 + Y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{9}e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 6 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y = x^2 e^x.$$

Rješenje:

Pripadna homogena jednadžba je $y'' + y = 0$, a njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 + 1 = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa je

$$y_0 = e^{0\cdot x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Prelazimo na određivanje oblika partikularnog rješenja Y. Kako je $f(x) = x^2 e^x$, a $a = 1$ nije korijen karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje Y tražimo u obliku

$$Y = (Ax^2 + Bx + C)e^x,$$

gdje su A, B i C koeficijenti koje treba odrediti uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu jednadžbu. Računamo

$$\begin{aligned} Y' &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x = (Ax^2 + (2A + B)e^x + B + C)e^x \\ Y'' &= (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)e^x + B + C)e^x = \\ &= (Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + C)e^x, \end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$(Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + C)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x = x^2 e^x.$$

Sada dijeljenjem s e^x i grupiranjem po potencijama od x dolazimo do jednakosti polinoma drugog stupnja

$$2Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + 2C = x^2,$$

što uspoređivanjem koeficijenata (uz odgovarajuće potencije od x moraju stajati isti koeficijenti kako bi polinomi bili jednaki!) lijeve i desne strane gornje jednakosti vodi na sljedeći sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2A &= 1 \\ 4A + 2B &= 0 \\ A + B + C &= 0. \end{aligned}$$

Sustav ima jedinstveno rješenje koje glasi $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$, pa je

$$Y = (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x$$

i stoga je konačno rješenje zadatka dano s

$$y = y_0 + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 7 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - y = \sin x.$$

Rješenje:

Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 1 = 0$ pripadne homogene jednadžbe $y'' - y = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 1$, pa je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe dano s

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}.$$

Kako je $f(x) = \sin x = e^{0\cdot x}(1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x)$, imamo $a = 0$, $b = 1$. Kako $a \pm bi = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$ nisu korijeni gornje karakteristične jednadžbe, to partikularno rješenje Y tražimo u obliku

$$Y = e^{0\cdot x}(A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = A \cos x + B \sin x,$$

gdje su A i B konstantni polinomi koje treba odrediti uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu diferencijalnu jednadžbu. Računamo stoga

$$\begin{aligned} Y' &= -A \sin x + B \cos x \\ Y'' &= -A \cos x - B \sin x, \end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu jednadžbu imamo

$$\begin{aligned} -A \cos x - B \sin x - (A \cos x + B \sin x) &= \sin x \\ -2A \cos x - 2B \sin x &= \sin x. \end{aligned}$$

Sada izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos x$ i $\sin x$ s lijeve i desne strane gornje jednakosti (s desne strane uz $\cos x$ stoji nula!) imamo

$$\begin{aligned} -2A &= 0 \\ -2B &= 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$. Stoga je

$$Y = -\frac{1}{2} \sin x,$$

pa je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe dano s

$$y = y_0 + Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x, \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Primjer 8 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 4y = (25x + 5) \cos x.$$

Rješenje:

Najprije rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu $y'' - 4y = 0$. Njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 4 = 0$ ima dva različita realna rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 2$, pa opće rješenje pripadne homogene jednadžbe glasi

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo odredili oblik u kojem ćemo tražiti partikularno rješenje Y, potrebno je uočiti da $f(x) = (25x+5)\cos x$ sadrži trigonometrijsku funkciju, točnije da $f(x)$ možemo shvatiti kao $f(x) = e^{0 \cdot x}((25x+5) \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x)$, pa prema situaciji opisanoj pod (2) na str. 4 vidimo da (jer $a \pm bi = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$ nisu korijeni karakteristične jednadžbe) Y treba tražiti u obliku

$$Y = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$$

(primijetimo da su nepoznati polinomi uz $\cos x$ i $\sin x$ ovdje **istog** stupnja, i to maksimalnog stupnja od polinoma koji se javljaju u $f(x)$). Sada još treba izračunati Y'':

$$\begin{aligned}
Y' &= A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x = \\
&= (Cx+A+D)\cos x + (-Ax-B+C)\sin x \\
Y'' &= C\cos x - (Cx+A+D)\sin x - A\sin x + (-Ax-B+C)\cos x = \\
&= (-Ax-B+2C)\cos x + (-Cx-2A-D)\sin x.
\end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$(-Ax-B+2C)\cos x + (-Cx-2A-D)\sin x - 4((Ax+B)\cos x + (Cx+D)) = (25x+5)\cos x,$$

odakle grupiranjem po $\cos x$ i $\sin x$ imamo

$$(-5Ax-5B+2C)\cos x + (5Cx+5D+2A)\sin x = (25x+5)\cos x.$$

Sada izjednačavanjem polinoma uz $\cos x$ i $\sin x$ s lijeve i s desne strane gornje jednakosti (uz $\sin x$ s desne strane stoji nulpolinom!) imamo

$$\begin{aligned}
-5Ax-5B+2C &= 25x+5 \\
5Cx+5D+2A &= 0,
\end{aligned}$$

odakle pak izjednačavanjem koeficijenata uz potencije x dolazimo do sustava

$$\begin{aligned}
-5A &= 25 \\
-5B+2C &= 5 \\
5C &= 0 \\
5D+2A &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenje gornjeg sustava je jedinstveno i glasi $A = -5$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$, pa je partikularno rješenje dano s

$$Y = (-5x-1)\cos x + 2\sin x.$$

Stoga je rješenje polazne diferencijalne jednadžbe

$$y = y_0 + Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (-5x-1)\cos x + 2\sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 3 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

1) $y'' - 4y' + 4y = x^2$

2) $y'' - 8y' + 7y = 14$

3) $y'' - y = e^x$

4) $y'' + y = \cos x$

5) $y'' + y' - 2y8\sin 2x$

6) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x.$